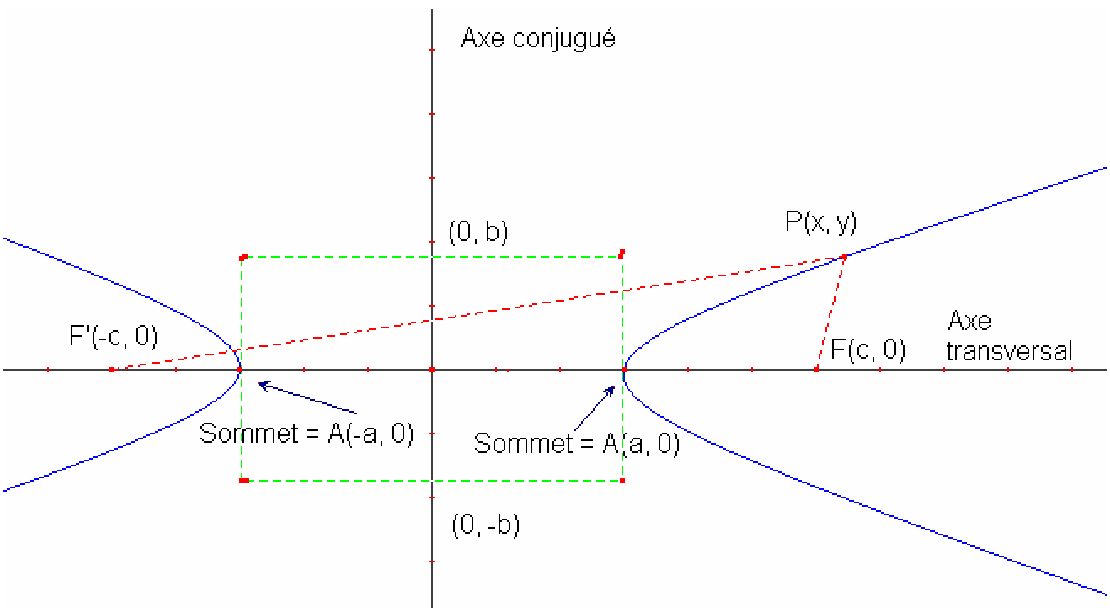
Les coniques

Quatrième conique : **L'hyperbole**

Les caractéristiques de l'hyperbole de centre (0,0)

Définition :
L'hyperbole est le lieu d'un point dont la valeur absolue de la différence des distances à deux points fixes, appelés foyers, est constante.

Donc, | d(P, F) - d(P, F') | = K

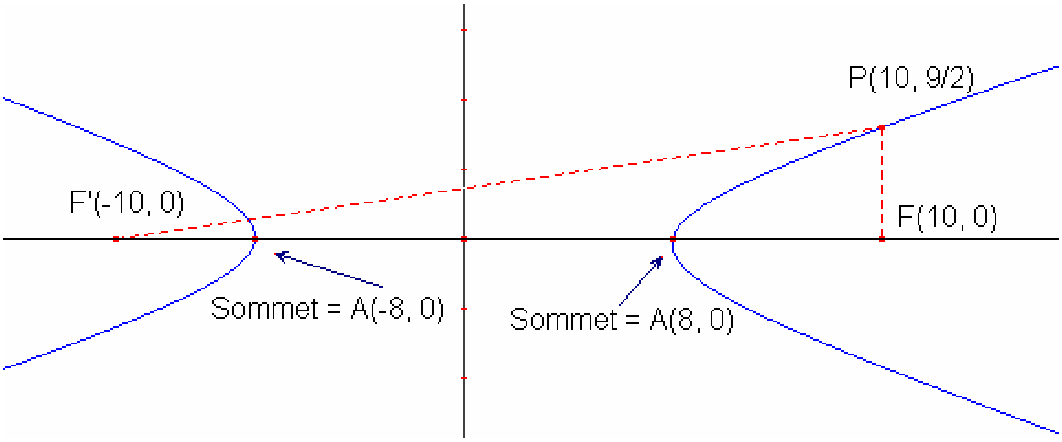


La constante correspond toujours à la distance entre les deux sommets sur l'axe transversal. ➔ K = 2a dans ce cas-ci car l'axe transversal est sur l'axe des X.

Définition :
Dans le cas où l'axe transversal est sur l'axe des X

- Axe transversal est le segment touchant les deux sommets dont la longueur est 2a et contenant les deux foyers.
- Axe conjugué est le segment du paramètre –b à b dont la longueur est 2b

Exemple :



Voici la formule : | d(P, F) - d(P, F') | = K

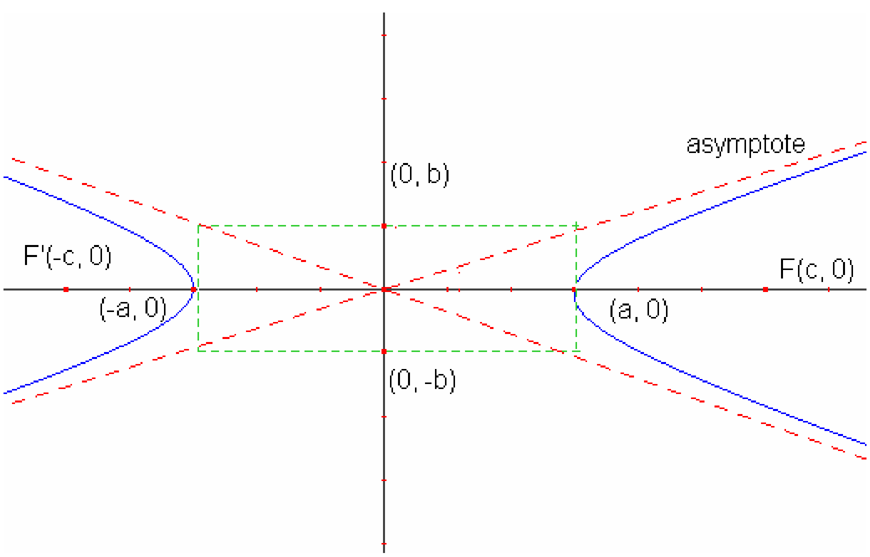
$$\left|\sqrt{(10-10)^2+(\frac{9}{2}-0)^2}-\sqrt{(10--10)^2+(\frac{9}{2}-0)^2}\right| = \left|\sqrt{(\frac{9}{2})^2}-\sqrt{(20)^2+(\frac{9}{2})^2}\right| =$$

$$\left|\frac{9}{2}-\sqrt{400+\frac{81}{4}}\right| = \left|\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{1600}{4}+\frac{81}{4}}\right| = \left|\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{1681}{4}}\right| = \left|\frac{9}{2}-\frac{41}{2}\right| = \left|-\frac{32}{2}\right| = 16$$

<u>Voici l'équation de l'hyperbole</u>

L'équation d'une hyperbole centrée à l'origine dépend de l'orientation de l'axe transversal.

1- Axe transversal horizontal



L'équation :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

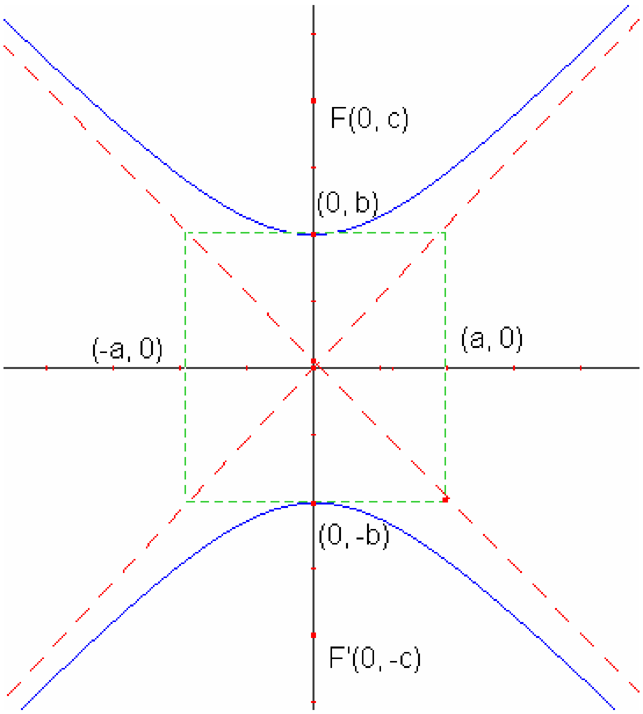
La relation entre les paramètres :

$c^2 = a^2 + b^2$

Équation des asymptotes :

$$Y = \pm\frac{b}{a}x$$

2- Axe transversal vertical



L'équation :

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

La relation entre les paramètres :

$c^2 = a^2 + b^2$

Équation des asymptotes :

$$Y = \pm \frac{b}{a} x$$

Remarque : les asymptotes touchent les 4 coins du rectangle.

Forme générale :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \Rightarrow$$

$Ax^2 + By^2 + C = 0$ (A est toujours POSITIFS et B, C sont toujours NÉGATIF)

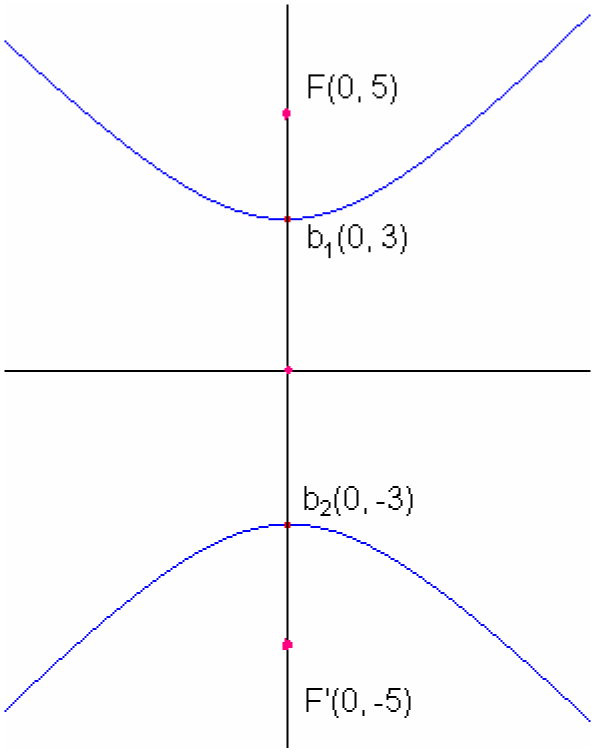
Exemple 1 :

Écrire sous la forme générale

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \text{Multiplier par } 4*9 = 36 \Rightarrow 4x^2 - 9y^2 = 36$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$$

Exemple 2 : Trouver l'équation de l'hyperbole



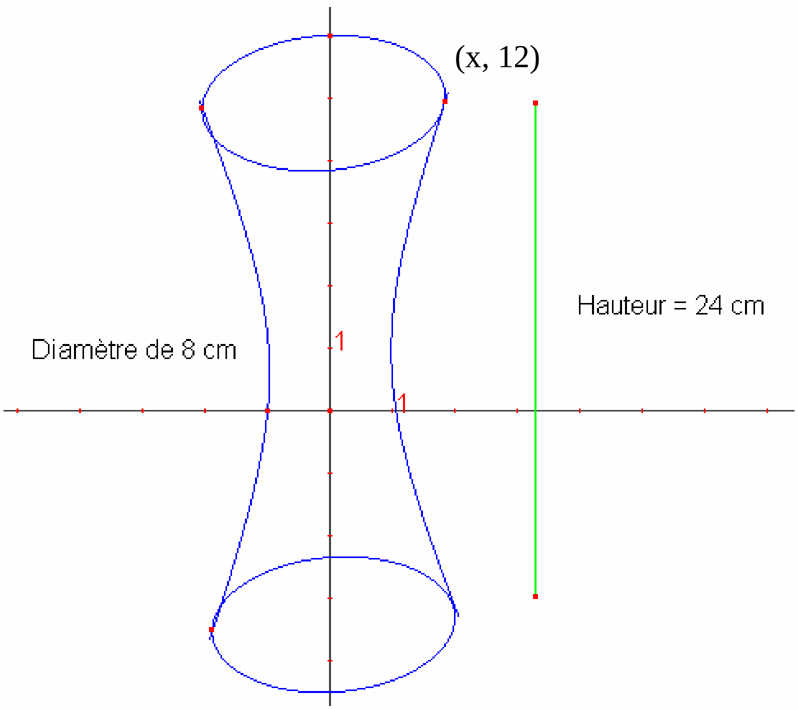
Pour trouver le paramètre a qui est nécessaire à la conception de la formule, il faut utiliser l'équation suivante :

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = a^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 = 25\text{-}9 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$ Donc, a = 4

La formule à utiliser est $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

Donc, $\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

Exemple 3 :
Un trophée a la forme d'une hyperbole. Le diamètre au centre du trophée mesure 8 cm. La hauteur du trophée mesure 24 cm. Le paramètre du foyer est c=12,645. Quelle est la largeur de l'ouverture du trophée?



Dans un premier temps, il faut construire l'équation.

Il suffit de faire le trophée dans un plan cartésien et de placer le centre du trophée à l'origine. Si le diamètre est de 8, les sommets de l'hyperbole sont à (-4, 0) et (4, 0) donc, a=4. À l'aide de la relation $c^2 = a^2 + b^2$, nous allons trouver le paramètre b.
$c^2 = a^2 + b^2$ ➔ $(12{,}645)^2 = 4^2 + b^2$ ➔ $b^2 = 160-16 = 144$ ➔ $b = \pm 12$

L'équation sera :

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{12^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{144} = 1$$

La coordonnée de l'ouverture dans le premier quadrant est (x, 12). Remplaçons cette coordonnée dans l'équation.

$$\frac{x^2}{16} - \frac{12^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{144}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - 1 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} = 2 \Rightarrow x^2 = 32 \Rightarrow x = \pm 5{,}66$$

Donc, l'ouverture mesure 5,66 + 5,66 = 11,32 cm