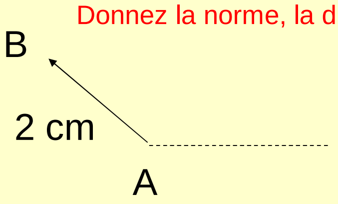
Chapitre 3.1 — Représentation d'un vecteur

Norme: une grandeur, une mesure.

Orientation: une direction et un sens.

inclinaison — *où il pointe*

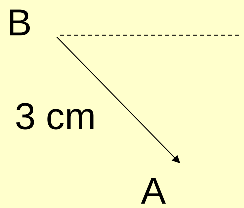
Donnez la norme, la direction et le sens des vecteurs suivants



La norme: 2

La direction: NO et SE

Le sens: $\overrightarrow{AB}$



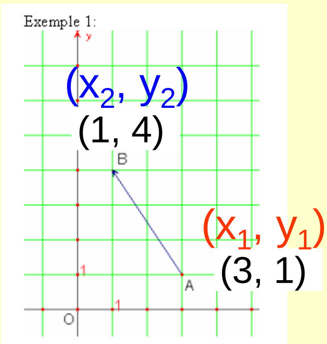
La norme: 3

La direction: NO et SE

Le sens: $\overrightarrow{BA}$

Chapitre 3.1 — Norme et orientation

Trouvez la composante **(a, b)**

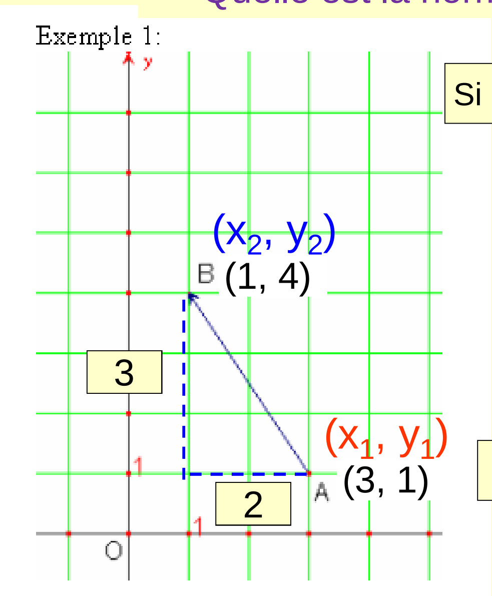


$a = x_2 - x_1 = 1 - 3 = -2$

$b = y_2 - y_1 = 4 - 1 = 3$

$\overrightarrow{AB} = (-2, 3)$

Quelle est la norme de ce vecteur?



Si on connaît la composante (-2,3)

Pythagore

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

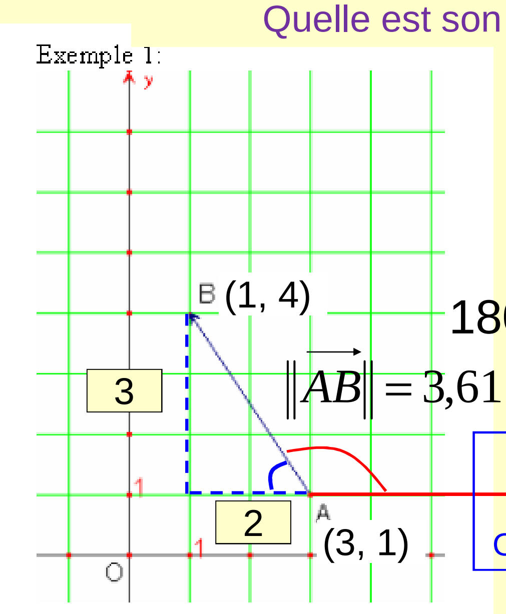
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 3{,}61 \text{ u}$$

Ou formule de la distance

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Quelle est son orientation?



$$\tan A = \frac{3}{2}$$

56,31º

180º - 56,31º = 123,69º

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 3{,}61 \text{ u}$$

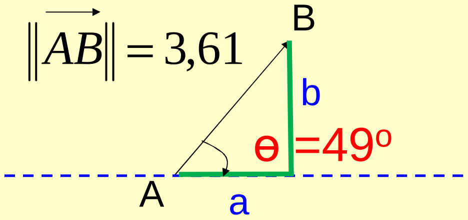
Norme: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 3{,}61 \text{ u}$

Orientation: θ =123,69º

Chapitre 3.1

Résumé

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 3{,}61$$



Composante **(a, b)**

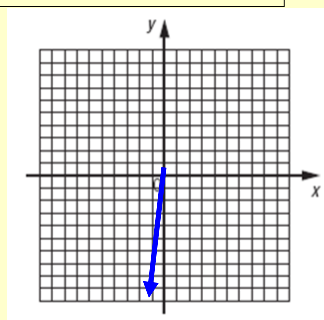
Chapitre 3.1

Trouver la composante

Déterminez la composante du vecteur suivant:

$\left\|\vec{u}\right\| = 34$

Orientation : 257°



$\vec{u} \approx (\|\vec{u}\|\cos(\Theta^o), \|\vec{u}\|\sin(\Theta^o))$

$\vec{u} \approx (34*\cos(257^o), 34*\sin(257^o))$

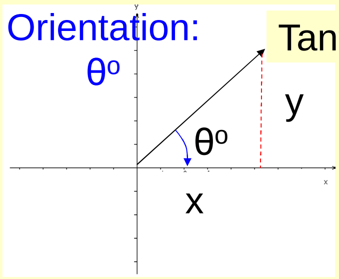
$\vec{u} \approx (-7{,}65, -33{,}13)$

Procédure pour trouver l'orientation

De façon générale, il faut former un triangle rectangle. La meilleure façon pour suivre ma procédure est de former le triangle avec l'axe des abscisses (car l'orientation se trouve avec l'axe horizontale)

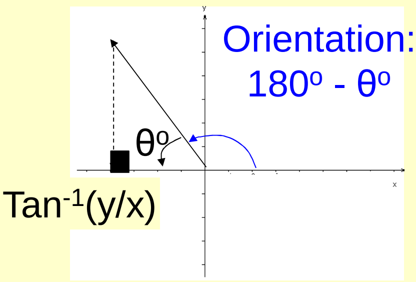
Composante: (a, b) ou (x, y)

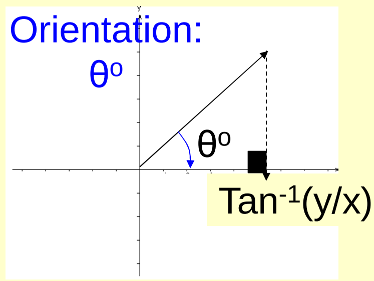
Pour trouver $\tan^{-1}(y/x)$, toujours prendre les valeurs positives de x et y.

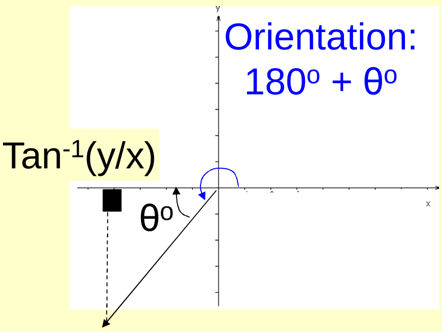


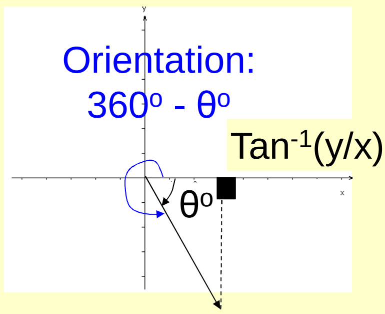
Bref, rester sur le plancher des vaches!

Procédure pour trouver l'orientation





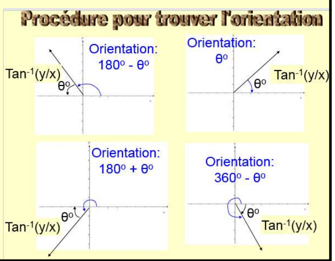




Chapitre 3.1

Trouver la norme et l'orientation

Composante	Norme $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{a^2+b^2}$	Orientation $\tan^{-1}(y/x)$
$\vec{u} = (3,6)$	$\|\vec{u}\| = 6{,}71$	$\theta = 63{,}43$
$\vec{v} = (-4,5)$	$\|\vec{v}\| = 6{,}40$	$\theta = 128{,}66$
$\vec{w} = (-6,-12)$	$\|\vec{w}\| = 13{,}42$	$\theta = 243{,}43$
$\vec{z} = (5,-14)$	$\|\vec{z}\| = 14{,}87$	$\theta = 289{,}65$



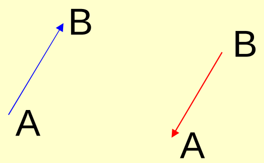
Chapitre 3.1

Relations entre les vecteurs

Vecteurs opposés

$\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = (2,3)$



Vecteur opposé

$-\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BA}$

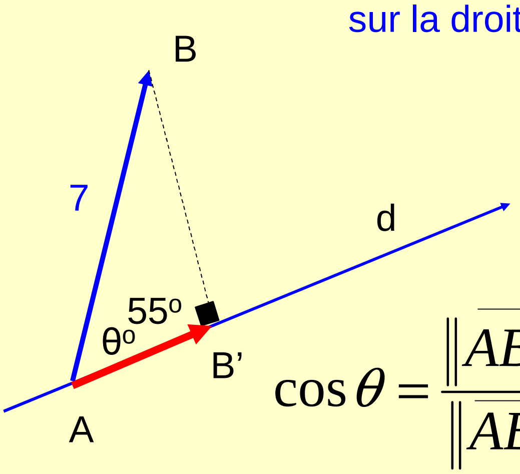
$\overrightarrow{BA} = (-2, -3)$

$-\overrightarrow{AB} = (-2, -3)$

Chapitre 3.2

Projection d’un vecteur

Déterminez la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur la droite d



$$\|\overrightarrow{AB'}\| = \|\overrightarrow{AB}\|\cos(\theta^o)$$

$$\|\overrightarrow{AB'}\| = 7\cos(55^o)$$

$$\|\overrightarrow{AB'}\| = 4{,}02$$

$$\cos\theta = \frac{\|\overrightarrow{AB'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

Projection orthogonale	On projette de façon orthogonale un vecteur sur une droite. On trouve la norme de la projection à l’aide du cosinus	$\|\overrightarrow{AB'}\| = \|\overrightarrow{AB}\|\cos(\theta^o)$ où AB’ est le vecteur projeté

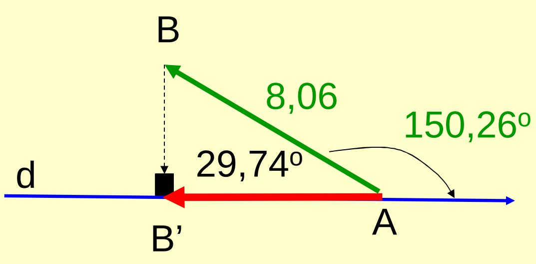
Chapitre 3.2

Projection orthogonale

Déterminez la norme de la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur la droite d.

$$\|\overrightarrow{AB}\| = 8{,}06$$

$$\theta = 150{,}26^o$$



$$\|\overrightarrow{AB'}\| = \|\overrightarrow{AB}\|\cos(\theta^o)$$

$$\|\overrightarrow{AB'}\| = 8{,}06\cos(29{,}74^o)$$

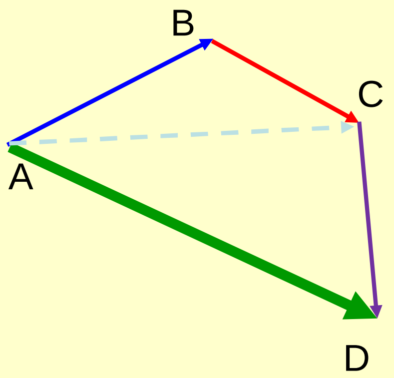
$$\|\overrightarrow{AB'}\| = 7$$

Chapitre 3.2 — Relation de Chasles

$\overrightarrow{A\cancel{B}} + \overrightarrow{\cancel{B}C} + \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{A\cancel{C}} + \overrightarrow{\cancel{C}D}$

$= \overrightarrow{AD}$ Vecteur résultant

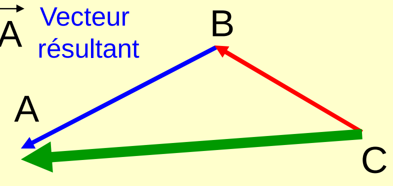


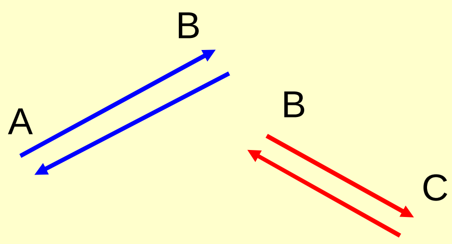
$-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$ Opposé

$= \overrightarrow{C\cancel{B}} + \overrightarrow{\cancel{B}A}$ Commutativité

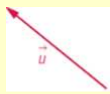
$= \overrightarrow{CA}$ Vecteur résultant

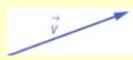




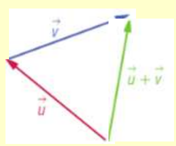
Chapitre 3.2 — Construction géométrique

Trouver le vecteur résultant $\vec{u}+\vec{v}$

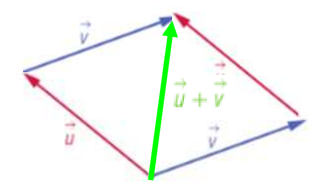




Vecteurs qui se suivent

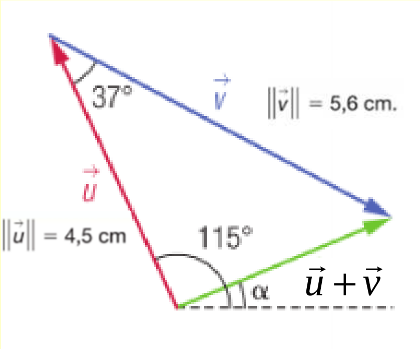


Méthode du Parallélogramme (avec 2 vecteurs)



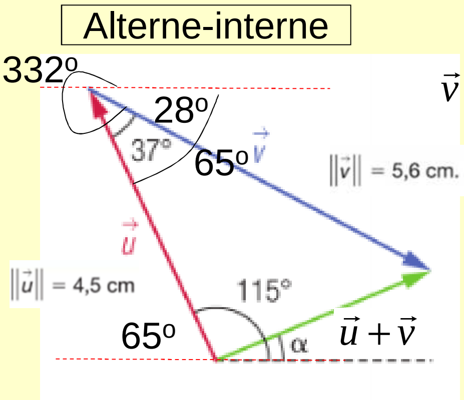
Chapitre 3.2 Norme et orientation du vecteur résultant à l'aide des composantes

Trouvons l'orientation des vecteurs



Chapitre 3.2 Norme et orientation du vecteur résultant

Trouvons l'orientation des vecteurs



$$\vec{u} = (4{,}5\cos(115);4{,}5\sin(115))$$

$$\vec{u} = (-1{,}9018;4{,}0784)$$

$$\vec{v} = (5{,}6\cos(332);5{,}6\sin(332))$$

$$\vec{v} = (4{,}9445;-2{,}629)$$

$$\vec{u}+\vec{v} = (3{,}0427;1{,}4494)$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = 3{,}37$$

$$\theta = 25{,}47^o$$

1. Un joueur de hockey est placé au point A(2, 4). Il lance la rondelle sur la bande sur une distance de 6,3 mètres avec une orientation de 65°. La rondelle ricoche et glisse sur une distance de 5,7 mètres avec une orientation de 304,7°. Son coéquipier reçoit ainsi la rondelle. Quelles auraient été la distance et l'orientation si le premier joueur avait fait la passe directement à son coéquipier?

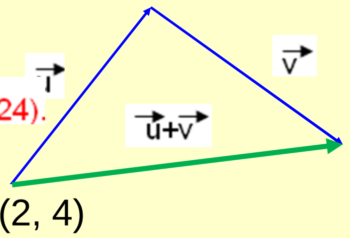
$\vec{u} = (2{,}662; 5{,}71)$

$\vec{v} = (3{,}245; -4{,}686)$

Le lancer direct sera $\vec{u} + \vec{v} = (5{,}907; 1{,}024)$.

Norme de $\vec{u} + \vec{v}$: 5,995 m

Orientation : 9,83°



2. Deux amis sont à la croisée d'un chemin. Ils ont le choix de deux trajets. Le premier trajet consiste à prendre la rue Clef sur une distance de 30 m avec une orientation de 126° et tourner à droite sur la rue Deschamps longue de 40 m et avec une orientation de 73°. Le deuxième trajet consiste à se rendre directement à l'extrémité de la rue Deschamps. Ils estiment que l'écart de la distance entre les deux trajets est d'au maximum 10 m? Ont-ils raison?

Supposons le vecteur $\vec{c}$ pour la rue Clef. $\vec{c} = (-17{,}634; 24{,}271)$

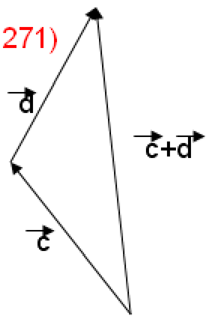
La rue Deschamps sera le vecteur $\vec{d} = (11{,}695; 38{,}252)$

$\vec{c} + \vec{d} = (-5{,}939; 62{,}523)$

Distance du premier trajet : $||\vec{c}|| + ||\vec{d}||$ = 30 + 40 = 70 m

Distance du deuxième trajet : $||\vec{c} + \vec{d}||$ = 62,80 m

Ils ont raison, car l'écart est d'environ 7,2 m



3. Lors d'une compétition de natation extérieure, les spectateurs observent une nageuse. Ils remarquent, à l'œil, qu'elle nage avec une orientation de 120° à une vitesse moyenne de 2,5 m/s (sa vitesse réelle). Il a été mentionné au début de la compétition que le courant avait une vitesse de 1,1 m/s avec une orientation de 85°. Les spectateurs (qui sont très curieux) aimeraient connaître la vitesse de la nageuse ainsi que son orientation.

Supposons le vecteur $\vec{c}$ pour le courant : $\vec{c}$ = (0,096; 1,096)

Le vecteur $\vec{v_r} = \vec{c} + \vec{n}$ est le vecteur résultant de la nageuse et du courant.

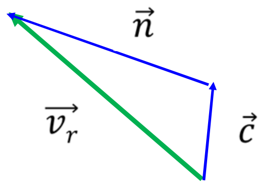
$\vec{v_r}$ = (2,5cos(120°), 2,5sin(120°)) = (-1,25; 2,165)

Cherchons la composante de la nageuse :

$\vec{v_r} = \vec{c} + \vec{n}$

(-1,25 ; 2,165) = (0,096; 1,096) + $\vec{n}$

$\vec{n}$ = (-1,346; 1,069)



Voici la norme et l'orientation de la nageuse :

|| $\vec{n}$ || = 1,72 m/s

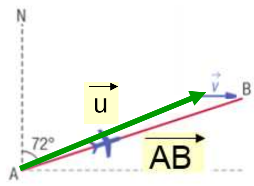
Orientation : 141,54°

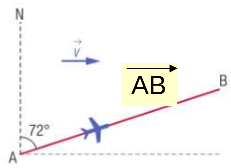
PROBLÈMES

12 Deux aéroports … sorte qu'un seg… et ils sont situés de telle … e 72° par rapport au nord.

Un vent, $\vec{v}$, de … la vitesse de to… l'ouest et influe sur … s A et B.

Quelles doivent … pour qu'il se re… a vitesse de l'avion … en 9 h ?





Norme et orientation de $\vec{d}$, représentant le déplacement effectué par un avion volant de l'aéroport A à l'aéroport B :

$\|\vec{d}\| = 6200$ Vecteur résultant

$\theta_{\vec{d}} = 90° - 72°$

$= 18°$

Vitesse du vecteur résultant en 9 h :

$6200 \div 9 = 688,\bar{8}$ km/h

$\|\vec{AB}\| = 688,\bar{8}$

$\theta_{\vec{AB}} = 18°$

Composantes de $\vec{AB}$:

$a = 688,\bar{8} \times \cos 18°$

$\approx 655,17$

$b = 688,\bar{8} \times \sin 18°$

$\approx 212,88$

(655,17; 212,88)

Composantes de $\vec{v}$, représentant la vitesse du vent.

$a = 40$

$b = 0$

(40, 0)

Composantes de $\vec{u}$, représentant la vitesse réelle de l'avion pour qu'il se rende de l'aéroport A à l'aéroport B en 9 h.

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{AB}$

Norme et orientation de $\vec{u}$:

$\|\vec{u}\| \approx \sqrt{615,17^2 + 212,88^2}$

$\approx 650,96$ km/h

$\tan \theta_{\vec{u}} \approx \frac{212,88}{615,17}$

$\theta_{\vec{u}} \approx \tan^{-1}\left(\frac{212,88}{615,17}\right)$

$\approx 19,09°$

Chapitre 3.3

Multiplier un vecteur par un scalaire

$$\vec{u} = (3,4) \quad \| \vec{u} \| = 5$$

Exemple 1

$$3\vec{u} = 3 \times (3,4) \qquad \| 3\vec{u} \| = 15$$
$$= (9,12)$$

Exemple 2

$$-3\vec{u} = -3 \times (3,4) \qquad \| -3\vec{u} \| = 15$$
$$= (-9,-12)$$

La norme est toujours positive

$$|-3| \times \| \vec{u} \| = 15$$

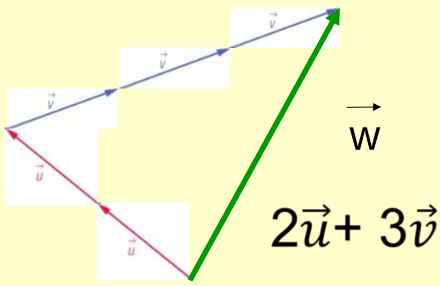
$$\left\| \vec{u} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Chapitre 3.5

Combinaison linéaire

Trouver le vecteur résultant de cette combinaison linéaire

$$2\vec{u} + 3\vec{v}$$



$\vec{u} = (-3, 2)$ et $\vec{v} = (3, 1)$

$2(-3, 2) + 3(3, 1) = \vec{w}$

$(-6, 4) + (9, 3) = \vec{w}$

$\vec{w} = (3, 7)$

Chapitre 3.5 — Combinaison linéaire

$\vec{u} = (1, 3)$ et $\vec{v} = (3, 5)$

Représenter le vecteur résultant $\vec{w} = (10, 20)$ à l'aide d'une combinaison linéaire: $\vec{w} = c\vec{u} + d\vec{v}$

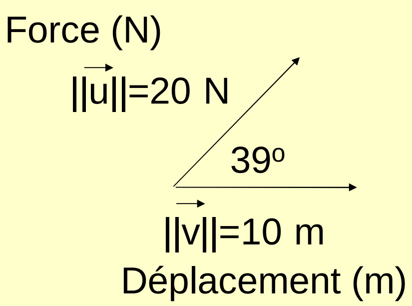
Étape 1	(10, 20) = c(1, 3) + d(3, 5)
Étape 2	(10, 20) = (c, 3c) + (3d, 5d)
Étape 3	10 = c + 3d 20 = 3c + 5d
Étape 4	-30 = -3c - 9d 20 = 3c + 5d

Méthode d'addition

c = 2,5
d = 2,5

$$\vec{w} = 2,5\vec{u} + 2,5\vec{v}$$

Chapitre 3.6 — Produit scalaire



Le produit scalaire donne le travail (J)

$\vec{u} \bullet \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\theta$

$\vec{u} \bullet \vec{v} = 20 \times 10 \times \cos 39^{o}$

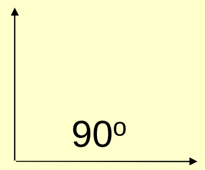
155,43 J

Force(N) x Déplacement (m) x Cos(angle) = Travail (J)

Chapitre 3.6

Produit scalaire

$\|\vec{u}\|=20$ N



$\|\vec{v}\|=10$ m

Déplacement (m)

Le produit scalaire donne le travail (J)

$\vec{u}\bullet\vec{v}=\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$

$\vec{u}\bullet\vec{v}=20 \times 10 \times \cos 90^{\circ}$

0 J

Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux (90º) est nul (égal à 0).

Force(N) x Déplacement (m) x Cos(angle) = Travail (J)

Produit scalaire de deux vecteurs	$u \bullet v = \|u\| \times \|v\| \times \cos\Theta$ Θ est l'angle formé par les deux vecteurs Si on connaît les composantes u=(a, b) v=(c, d) $u \bullet v = ac + bd$ *(il y a une flèche sur tous les vecteurs u,v)*	Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul (0). **Force(N) x Déplacement (m) x Cos(angle) = Travail (J)**

Produit scalaire positif

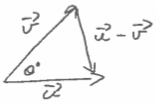
Travail moteur

Produit scalaire négatif

Travail résistant

Produit Scalaire

$\vec{u} = (a, b) \quad \vec{v} = (c, d)$



$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{c^2 + d^2}$

$\vec{u} - \vec{v} = (a - c, b - d)$

$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

Loi des cosinus

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

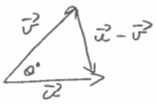
$$2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\theta = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

$$\boxed{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

$$u \bullet v = \|u\| \times \|v\| \cos\theta^o$$

Produit Scalaire

$\vec{u} = (a, b) \quad \vec{v} = (c, d)$



$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{c^2 + d^2}$

$\vec{u} - \vec{v} = (a - c, b - d)$

$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{c^2+d^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\right)^2\right)$$

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{c^2+d^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2 - (a-c)^2 - (b-d)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2 - (a^2-2ac+c^2) - (b^2-2bd+d^2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2 - a^2 + 2ac - c^2 - b^2 + 2bd - d^2\right)$$

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{c^2+d^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2 - a^2 + 2ac - c^2 - b^2 + 2bd - d^2\right)$$

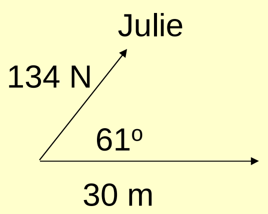
$$= \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2 - a^2 + 2ac - c^2 - b^2 + 2bd - d^2\right)$$

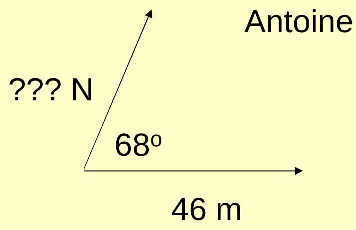
$$= \frac{1}{2}\left(2ac + 2bd\right)$$

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = ac + bd$$

Voilà

Le travail exercé par ces deux personnes est identique.
Pourtant, une des deux personnes force moins que l'autre.
Laquelle?





Julie
$134 \times 30 \times \cos(61^o) = 1948{,}93$ J

Antoine
$y \times 46 \times \cos(68^o) = 1948{,}93$ J

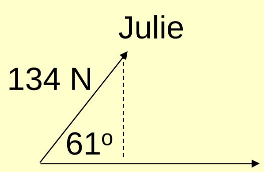
Antoine
$y = 113{,}1$ N

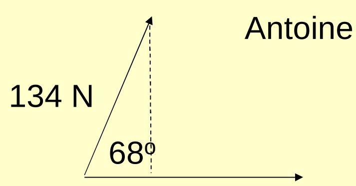
Antoine forcera le moins

L'objet à bouger devait être différent

Moins de friction pour celui d'Antoine

Pour la projection orthogonale,
plus l'angle est petit,
plus la force horizontale sera grande.

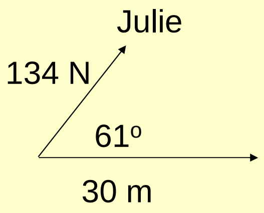


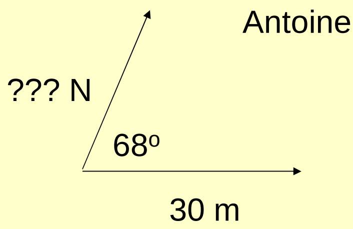


Julie
$134 \times \cos(61^o) = 64{,}96$ N

Antoine
$134 \times \cos(68^o) = 50{,}20$ N

Si on refait le même problème, mais avec le même déplacement sur le même objet…





Julie
134 x 30 x cos(61º) = 1948,93 J

Antoine
y x 30 x cos(68º) = 1948,93 J

Antoine
y = 173,42 N